Sujet 1:

1. Soit f la fonction définie par : $f(x)=(x-3)(x-1)(x-2)$

   Monter que : $\exists a\in]1,3[.\quad f''(a)=0$

2. Soit g la fonction définie par : $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$

   Quelle est le nombre minimal de solutions dans $]1,7[$ de l'équation : $f^{(6)}(x)=0$

Sujet 2 :

1. Montrer que : $\exists c\in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[.\quad \sin(c)=c^2$
2. Déduire que l'équation $\cos(x)-2x=0$ admet aumoins une solution dans $]0,c[$

Sujet 3 :

f et g sont continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ telles que :

$\forall x\in[a,b].\quad g(x)\neq 0$ et $\forall x\in]a,b[.\quad g'(x)\neq 0$ et $f(a)g(b)=f(b)g(a)$

Appliquer le théorème de Rolle à une fonction appropriée et montrer que :

$$\exists c\in]a,b[.\quad \frac{f(c)}{g(c)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Sujet 4 :

Soit $f(x)=x\mathrm{Arctg}\left(\sqrt[3]{x^2+\frac{1}{x^2}}\right)$ définie sur IR^*. On pose : $F(x)=\frac{f(x)}{x}\quad (x\in IR^*)$

1. Montrer que : $\forall x\neq 0.\quad F(x)=F\left(\frac{1}{x}\right)$
2. a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)-\frac{\pi}{2}x$.

   b) Interpréter graphiquement ces résultats
3. Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ puis interpréter les résultats graphiquement
4. Montrer que : $\forall x\in IR^*-\{-1,1\}.\quad \exists c_x\in IR^*.\quad F'(c_x)=0$ et $xc_x>0$
5. Calculer $F'(x)$ et vérifier qu'on a aussi $F(1)=0$ et $F'(-1)=0$
6. On prend dans cette question $x=\frac{9}{10}$

   a) Montrer que $\exists c\in \left]\frac{9}{10},\frac{10}{9}\right[.\quad cf'(c)-f(c)=0$

   b) Montrer que la tangente à C_f au point $A(c,f(c))$ passe par l'origine du repère

Sujet 5 :

Soit f dérivable sur IR^{+} avec $f(0)=\lim_{x\to+\infty} f(x)$

On pose $g(x)=\frac{x}{1-x}$ pour tout x de l'intervalle $I=[0,1[$

1. Déterminer $g(I)$
2. a) Vérifier que fog est continue en 0

   b) Montrer que fog admet un prolongement par continuité h en 1
3. Vérifier que fog est dérivable sur $]0,1[$
4. Appliquer le théorème de Rolle à h et déduire que : $\exists a\in]0,+\infty[.\quad f'(a)=0$

Sujet 6 :

f et g sont continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ tel que g' ne s'annule pas

1. Montrer, par l'absurde, que $g(a)\neq g(b)$
2. Soit $h(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$

   a) Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle

   b) Déduire que : $\exists c\in]a,b[.\quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$
1. Applications : Calculer $\lim_{x\to0^+}\frac{x-Arctgx}{x^3}$ et $\lim_{x\to0^+}\frac{x-sinx}{x^3}$

Sujet 7:

1. Montrer, en utilisant théorème des accroissements finis, que :

   $\forall 0\le a<b.\quad \frac{b-a}{1+b^2}<\arctan(b)-\arctan(a)<\frac{b-a}{1+a^2}$
2. Déduire que $\forall x\ge0.\quad \frac{x}{1+x^2}<\arctan(x)<x$ et calculer $\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan(x)-x}{x^2}$
3. Soit : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k^2+1}$

   a) Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad \frac{1}{(k+1)^2+1}\le Arctg(k+1)-Arctgk\le\frac{1}{k^2+1}$

   b) Montrer que : $\forall n\in IN^{*}.\quad S_n-1\le Arctg(n)\le S_{n-1}$

   c) Montrer que la suite (S_n) est convergente et que : $\frac{\pi}{2}\le\lim S_n\le1+\frac{\pi}{2}$

Sujet 8 :

Soit f une fonction continue sur IR^{+} et dérivable sur IR^{+*} telle que f' est croissante et $f(0)=0$.

1. Montrer par le théorème des accroissements finis, que : $\forall x>0. \quad f(x)<xf'(x)$
2. Déduire que la fonction $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ est croissante sur IR^{+*}

Sujet 9: Les suites (u_n) et (v_n) sont données par $u_0=2$ et $u_{n+1}=\sqrt[3]{9(u_n-1)}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

et $v_0=3$ et $v_{n+1}=\sqrt[3]{9(v_n-1)}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont minorées par 2 et majorées par 3
2. Montrer que : $\forall(x,y)\in[2,3]^2. \quad \left|\sqrt[3]{9(x-1)}-\sqrt[3]{9(y-1)}\right|\le\dfrac{|x-y|}{\sqrt[3]{3}}$
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Soit l leur limite commune
4. Montrer que l est la solution unique dans $[2,3]$ de l'équation $x^3-9x+9=0$ *et* que $l\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

Sujet 10 : Soit : $f(x)=\dfrac{2}{\pi}Arctg\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ pour tout $x<2$

1. Montrer que f est bijective de $]-\infty,2[$ vers un intervalle J et que : $\forall x\in]0,1[. \quad 0<f'(x)<\dfrac{1}{\pi}.$
2. Déduire que : $\forall(x,y)\in]0,1[^2. \quad |f(x)-f(y)|<\dfrac{1}{\pi}|x-y|$
3. a) Déduire que la fonction $x\to f(x)-x$ est strictement décroissante sur $]0,1[$

   b) Montrer que : $\exists!\,\alpha\in]0,1[. \quad f(\alpha)=\alpha$
4. Soit $u_0\in]0,1[$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que :

   a) $\forall n\in\mathbb{N}. \quad u_n\in]0,1[$

   b) $\forall n\in\mathbb{N}. \quad |u_{n+1}-\alpha|<\dfrac{1}{\pi}|u_n-\alpha|$. Déduire que la suite (u_n) est convergente de limite α

Sujet 11

1. Soit $\boldsymbol{f}$ continue sur $[\boldsymbol{a},+\infty[$ et dérivable sur $]\boldsymbol{a},+\infty[$ avec $\lim\limits_{x\to a^+}\boldsymbol{f}'(x)=\boldsymbol{d}$ $(\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}$ *et* $\boldsymbol{d}\in\mathbb{R})$

   Montrer que $\boldsymbol{f}$ est dérivable en $\boldsymbol{a}$ et que $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{d}$
2. a) Calculer la dérivée de la fonction $\boldsymbol{f(x)=\arctan\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)}$

   b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{arctg\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)+\frac{\pi}{2}}{x}$

   c) Retrouver ce résultat d'une autre manière

Sujet 12:

En utilisant TAF, Majorer l'erreur commise dans l'approximation de $\sqrt{10001}$ par 100