La rotation

Br-Rachid www.sc-math.e-monsite.com

Sujet 0

Soient ABC et AMN deux triangles directes et rectangles en A .

Montrer que $BM = CN$ et que les droites (BM) et (CN) sont perpendiculaires

Sujet 1

Soit ABC un triangle directe.

On construit les carrés $ACDE$ et $AFGB$ tels que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soient O et O' désignent respectivement les centres de ces deux carrés.

Soient I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[EF]$. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1- Montrer que $(\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{BE}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et que $FC = BE$

2- Déduire que OIO' est rectangle isocèle en I

3- Montrer que $JO'IO$ est un carré

Sujet 2 (Le point de Vecten)

Soit ABC un triangle directe. On construit les carrés :

$ABDE$ de centre P tels que $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$ACHI$ de centre R tels que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$BCFG$ de centre Q tels que $(\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit O le milieu de $[AB]$ et soit V l'orthocentre de PQR

1- Montrer que (BH) et (AF) sont perpendiculaires et $BH = AF$ également (Rotation de centre C)

2- Déduire que (OQ) et (OR) sont perpendiculaires et que : $OQ = OR$ (Théorème des milieux)

3- Montrer que (AQ) et (PR) sont perpendiculaires et que $AQ = PR$ (Rotation de centre O)

4- Déduire de ce qui précède que les droites (CP) et (BR) et (AQ) se coupent en V

Sujet 3

Soit ABC est un triangle équilatéral avec $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Soit les cercles (C) et (C') de même rayon, de centres respectifs B et C et tangents extérieurement.

Soient les points M de (C) et M' de (C') tels que $(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CM'}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

1. Montrer que la médiatrice de $[MM']$ passe par un point fixe lorsque M varie sur (C)
2. Soit H le projeté orthogonal de M sur La droite (AM'). Moyennant la rotation $R_{(A,\frac{\pi}{3})}$ et l'homothétie $h_{(A,\frac{1}{2})}$, déterminer l'ensemble des points H lorsque M varie sur (C)

Sujet 4

Soient (ABC) un triangle équilatérale et (C) le cercle circonscrit a (ABC).
Soit M le point de l'arc $\widehat{AC}$ ne contenant pas le point B. Soit $P \in [BM]$ avec $MP = MA$

1- Montrer que les angles géométriques $\widehat{AMB}$ *et* $\widehat{ACB}$ sont isométriques.

2- Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Montrer que $PB = MC$ et que $MA + MC = MB$

Sujet 5

On considère un triangle ABC équilatéral de centre O avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Soient r la rotation de centres O et d'angles $\frac{2\pi}{3}$

1. Montrer que : $r(A) = B$ et $r(B) = C$. Déduire l'image par r du segment $[AB]$
2. Soient M et P deux points de $[AB]$ et de $[BC]$ respectivement avec $AM = BP$.
   a) Montrer que $r(M) = P$
   b) Calculer MP en fonction de OM
   c) Déterminer le lieu de M sur $[AB]$ pour que MP soit minimal

Sujet 6

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle en A avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Soient R_A et R_C respectivement les rotation de centres A et C et d'angles $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$

On pose : $f = R_C o R_A$

1. Montrer que f est une rotation dont on déterminera l'angle puis déterminer $f(B)$
2. Soit I le point de rencontre des bissectrices intérieures de ABC
3. Montrer que : $R_C = S_{(CI)} o R_{(CA)}$ et $R_A = S_{(CA)} o R_{(AI)}$. Déduire que I est le centre de f

5- Soit $A' = f(A)$. Montrer que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IA'}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

Sujet 7

Soient ABC un triangle équilatéral direct de centre O. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

$$u = r_{(O,\frac{\pi}{3})} o r_{(O,\frac{-\pi}{3})} \ / \ v = r_{(C,\frac{\pi}{3})} o r_{(B,\frac{-\pi}{3})} \ / \ w = r_{(A,\frac{\pi}{3})} o r_{(O,\frac{2\pi}{3})} \ / \ q = r_{(A,\frac{\pi}{3})} o t_{\overrightarrow{AB}} \ / \ h = r_{(C,\frac{\pi}{3})} o r_{(B,\frac{\pi}{3})}$$

Sujet 8

Soient $ABCD$ un carré direct de centre O. Soit S la symétrie centrale de centre O. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1. Montrer que : $Sor^{-1}(B) = B$
2. Montrer que Sor^{-1} est une rotation dont on précisera le centre et l'angle
3. Soit M un point du plan. On pose : $r(M) = N$ et $Sor^{-1}(M) = M'$
   - Montrer que : $AN = CM'$ et $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM'}) = 0[2\pi]$
   - Déduire que : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{NM'}$ et que : $Sor^{-1} = t_{\overrightarrow{AC}} o r$