Chapitre : Suites Numériques

Br-Rachid *http://www.sc-math.e-monsite.com*

Sujet 1 :

Soit $u_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{n}{n^2+k}$ pour tout n entier naturel non nul

1. Calculer les deux premiers termes de la suite (u_n)
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*.\quad \frac{n}{n+1}\leq u_n\leq\frac{n^2}{n^2+1}$
3. Calculer $\lim (u_n)$

Sujet 2 :

1. Calculer les deux nombres réels a et b tels que : $\frac{2}{n^2+4n+3}=\frac{a}{n+1}+\frac{b}{n+3}$
2. Soient $u_0=0$ et $(n^2+4n+3)(u_n-u_{n-1})=2 \qquad (n\in IN^*)$
   a) Calculer u_2
   b) Calculer u_n en fonction de n pour tout $n\geq 2$
   c) En déduire $\lim (u_n)$

Sujet 3 :

La suite (u_n) est telle que $\sum_{k=0}^{k=n}u_k=\frac{n(4-n)}{2} \qquad (n\in\mathbb{N})$

1. Calculer u_1 et u_2
2. Calculer $\lim (u_n)$

Sujet 4 :

Soient les suites : $\begin{cases} u_0=-1 \quad ; \quad u_1=1 \\ u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n \end{cases}$. On pose : $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$ et $w_n=\frac{u_n}{v_n}$

1. Montrer que (v_n) est géométrique et écrire son terme général.
2. Montrer que (w_n) est arithmétique et écrire son terme général.
3. Ecrire le terme général de la suite (u_n)
4. a) Montrer que : $\forall n\geq 4.\quad 2^n\geq n^2$
   b) Déduire que : $\forall n\geq 4.\quad 0\leq\frac{n}{2^n}\leq\frac{1}{n}$ et calculer $\lim u_n$

Sujet 5 :

1. Montrer que : $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ pour tout $k\geqslant 2$ entier naturel
2. Soit : $u_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
   1- Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante
   2- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*.\quad 0<u_n\leq 2-\frac{1}{n}$
   3- Montrer que la suite (u_n) est convergente

Sujet 6 :

1. Soit (u_n) une suite convergente de limite l . Soient $v_n=u_{2n}$ et $w_n=u_{2n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   Montrer, en utilisant la définition, que $(v_n)=l$ et $(w_n)=l$

2. Montrer que la suite $\left(-1^n\right)$ n'a pas de limite

3. Soit $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

   a) Vérifier que la suite (S_n) est strictement croissante

   b) Montrer que : $\forall n>0.\quad S_{2n}-S_n\geq\frac{1}{2}$

   c) Montrer, par l'absurde, que $\lim S_n=+\infty$

Sujet 7 :

Calculer : $\lim\left(2-\sqrt{2}\right)^n$ et $\lim\frac{2^{n+3}}{\pi^{n-5}}$ et $\lim\frac{3^n+(-1)^n}{5^n+(-2)^n}$

Sujet 8 :

Soit $u_n=\frac{n^2}{2^n}\quad(n\in\mathbb{N})$

4. Calculer $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}$

5. Montrer que : $\exists N\in\in.\forall n>N.\quad\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{3}{4}$

6. Déduire que : $\forall n>N.\quad u_n<\left(\frac{3}{4}\right)^{n-N-1}u_{N+1}$ et calculer $\lim(u_n)$

Sujet 9 :

Soient $u_0=0$ et $u_{n+1}=\sqrt{12+u_n}\quad(n\in\mathbb{N})$

3. Montrer que la suite (u_n) est strictement majorée par 4

4. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad 4-u_{n+1}<\frac{1}{4}(4-u_n)$

5. Calculer $\lim(u_n)$

Sujet 10 :

Soit : $\begin{cases} u_0=1 \quad et \quad v_0=12 \\ u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+2v_n) \quad et \quad v_{n+1}=\frac{1}{4}(u_n+3v_n) \end{cases}$. On pose : $\begin{cases} w_n=v_n-u_n \\ t_n=3u_n+8v_n \end{cases}$

1. Montrer que (w_n) est géométrique et calculer $\lim(w_n)$

2. Montrer que (t_n) est constante

3. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et calculer leur limite commune

Sujet 11:

Soient $u_0=2$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_0=1$ et $v_{n+1}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{v_n}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}$. $u_{n+1}-v_{n+1}=\dfrac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$.
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$. $0<v_n<u_n$
3. Montrer que les suites $(u)_n$ et (v_n) sont monotone et déterminer leurs monotonies.
4. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ $0<u_{n+1}-v_{n+1}<\dfrac{1}{2}(u_n-v_n)$.
5. Déduire (u_n) et (v_n) ont adjacentes
6. Montrer que la suite $(u_n v_n)$ est constante. Déduire $\lim u_n$ *et* $\lim v_n$

Sujet 12 :

Soient : $u_n=\sum_{k=1}^{k=n}\dfrac{(-1)^k}{k}$ *et* $v_n=u_{2n}$ *et* $w_n=u_{2n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1- Etudier la monotonie de (w_n) est celle de (v_n)

2- Montrer que (w_n) et (v_n) sont adjacentes

Sujet 13:

Soit $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Soient les suites données par $u_n=2^n\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$ et $v_n=2^n\tan\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives
2. Montrer que $u_{n+1}\times\cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)=u_n$. Déduire que (u_n) est croissante
3. Montrer que $\dfrac{v_{n+1}}{1-\tan^2\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)}=v_n$. Déduire que (v_n) est décroissante
4. Montrer que $\lim(u_n)=\theta$ et $\lim(v_n)=\theta$
5. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes

Sujet 14:

I. Partie 1 : Soit $f(x)=2-\frac{1}{x+2}$. On pose $I=[1,\sqrt{3}[$

1. Poser le tableau des variations de f et représenter sa courbe dans un repère orthonormé
2. Montrer que si $1\leq x<\sqrt{3}$ alors $\frac{5}{3}\leq f(x)<\sqrt{3}$. En déduire que $f(I)\,C\,I$
3. Résoudre dans IR l'équation $f(x)=x$.
4. Vérifier que : $\forall x\in I.\quad |f'(x)|\leq\frac{1}{9}$

II. Partie 2 : On considère désormais la suite $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad 1\leq u_n<\sqrt{3}$
2. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante
3. Déduire que la suite (u_n) converge vers un nombre réel l et que $l\in[1,\sqrt{3}]$
4. En utilisant les opérations usuelles sur les limites (somme - produit – …), montrer que $l=\sqrt{3}$

III. Partie 3 : On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=\frac{u_n+\sqrt{3}}{u_n-\sqrt{3}}$

1. Montrer que (v_n) et géométrique.
2. Calculer $\lim\,(v_n)$. Déduire $\lim\,(u_n)$

IV. Partie 4 : (Un encadrement subtil)

1. Montrer que : $\forall n\in\in.|u_{n+1}-\sqrt{3}|\leq\frac{1}{9}|u_n-\sqrt{3}|$
2. Déduire que : $\forall n\in\in.|u_n-\sqrt{3}|\leq\left(\frac{1}{9}\right)^n(\sqrt{3}-1)$ puis calculer alors $\lim\,(u_n)$

Sujet 15:

Soit $f(x)=\frac{1}{4}\frac{1}{x^2+2}$

1. Montrer que f admet un point fixe unique ω dans $[0,1]$
2. Montrer que $f([0,1[)\,C\,[0,1[$
3. Montrer que : $\forall(x,y)\in[0,1]^2.\quad |f(x)-f(y)|\leq\frac{1}{2}|x-y|$

On considère la suite : $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_{n+1}=f(u_n)$

1. Calculer u_1 et u_2 et déduire que $(u_n))$ n'est pas monotone
2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}.\quad 0\leq u_n\leq 1$
3. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}.\quad |u_{n+1}-\omega|\leq\frac{1}{2}|u_n-\omega|$
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite