Suites Numeriques

Exercice 1 :

On donne $s_n=\frac{2n+3}{n+2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Calculer les trois premiers termes de la suite (S_n)
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad 1<u_n<2$
3. a- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+3)(n+2)}$

   b- En déduire que la suite (s_n) est strictement croissante
4. Verifier que $u_n=2-\frac{1}{n+2}$ et conjecturer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 2 :

Soit : $v_0=3$ et $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Calculer v_2
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad v_n>2$
3. a- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad v_{n+1}-v_n=1-\frac{1}{2}v_n$

   b- En déduire que la suite (v_n) est strictement decroissantes
4. Deduire de ce qui precede que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad 2<v_n\leq 3$
5. a- Montrer par recurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad v_n=2+\frac{1}{2^n}$

   b- Conjecturer la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$

Exercice 3 :

On donne $a_0=1$ et $a_{n+1}=2a_n+3$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad a_n\geq 1$
2. Montrer que (a_n) est strictement croissante
3. On pose $w_n=a_n+3$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   a- Montrer que $w_{n+1}=2w_n$ et deduire la nature de (w_n)

   b- Calculer w_n en fonction de n

   c- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$
4. Calculer a_n en fonction de n . En deduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$
5. Calculer $S_n=a_0+a_1+\dots\dots\dots+a_n$ en fonction de n

Exercice 4 :

Soient $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\frac{2u_n}{4u_n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Calculer u_1 et u_2 et déduire que (u_n) n'est pas monotone
2. On pose $v_n=\frac{1}{u_n}-\frac{4}{3}$. Montrer que (v_n) est geometrique
3. a- Calculer v_n en fonction de n

   b- En deduire u_n en fonction de v_n et deduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
4. Calculer $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{u_k}$ en fonction de n . Deduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 5 :

Soit $u_0=3$ et $u_{n+1}=\frac{12u_n-9}{4u_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_n>\frac{3}{2}$
2. a- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_n-u_{n+1}=\frac{(2u_n-3)^2}{4u_n}$

   b- Deduire que (u_n) est decroissante et majoré par 3
3. Soit $a_n=\frac{2}{2u_n-3}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   a- Calculer a_0

   b- Montrer que (a_n) est arithmétique et preciser sa raison

   c- En deduire a_n en fonction de n

   d- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$
4. a- Calculer u_n en fonction de a_n

   b- En deduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
5. Soit $S_n=a_0+a_1+.....+a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   a- Calculer S_n en fonction de n

   b- En deduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 6 :

Soit $\begin{cases} u_0=1 \quad et \quad v_0=12 \\ u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+2v_n) \quad et \quad v_{n+1}=\frac{1}{4}(u_n+3v_n) \end{cases}$

On pose $w_n=v_n-u_n$ pour $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que (w_n) est géométrique et deduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$
2. Montrer que (u_n) est strictement croissante
3. Montrer que (v_n) est strictement decroissante
4. a- Montrer que : $\forall n\geq 0.\quad u_n\leq 9\leq v_n$

   b- Deduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes
5. Montrer par recurrence que : $\forall n\geq 0.\quad 3u_n+8v_n=99$
6. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=9$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=9$

Exercice 7 :

Soient $u_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{2n+1}{4n+6}u_n$ et $v_n=(1+2n)u_n$

1. Montrer que $0\leq u_n\leq 1$
2. Montrer que (v_n) est géométrique et déduire son terme general
3. Calculer u_n en fonction de n puis calculer $\lim(u_n)$
4. Montrer que la suite $w_n=\ln v_n$ est arithmétique

Exercice 8 : On donne la suite $u_0=2\sqrt{2}$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad u_n>\sqrt{2}$
2. Montrer que la suite (u_n) est strictement decroissante
3. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad 0<u_{n+1}-\sqrt{2}\leq\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})$
4. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\ 0<u_n-\sqrt{2}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\sqrt{2}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 9 :

Soit $u_0=1$ et $(u_n+21)u_{n+1}=3u_n$ pour tout $n\geq 0$

1. Montrer (u_n) est positive et $7u_{n+1}<u_n$ pour tout $n\geq 0$
2. Montrer que (u_n) est strictement decroissante
3. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*.\quad 7^n u_n<1$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 10 :

On donne $v_0=1$ et $v_{n+1}=\sqrt{2+v_n}$ pour $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad 0<v_n<2$
2. a- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\ v_n-v_{n+1}=\frac{(v_n-2)(v_n+1)}{v_n+\sqrt{2+v_n}}$

   b- En déduire que la suite (v_n) est strictement croissante
3. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite

Exercice 11 : Soit $f(x)=x+\cos x$. Soit $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

1. Verifier que f est strictement croissante sur I
2. Determiner $f(I)$ et que $f(I)\subset I$

   On considere la suite $u_0=\frac{\pi}{4}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$
3. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad 0\leq u_n\leq\frac{\pi}{2}$
4. Montrer que (u_n) est croissante et est convergente
5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 12 :

Soit $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ definie pour tout $x\geq -1$

1. Montrer que f est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$
2. Soit $I=[1,2]$. Determiner $f(I)$ et verifier que $f(I)\subset I$
3. Montrer que : $\exists!\, c\in[1,2].\quad f(x)=x$

   Soient $v_0=1$ et $v_{n+1}=\sqrt[3]{1+v_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
4. Montrer par recurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}.\quad 1\leq v_n\leq 2$
5. Montrer par recurrence que (v_n) est strictement croissante
6. Montrer que (v_n) est convergente et calculer sa limite

Exercice 13 :

On considere les suites (u_n) non nulles qui verifient

$$u_{n+2}-\frac{3}{2}u_{n+1}+\frac{1}{2}u_n=0 \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. On suppose que (u_n) est geometrique de raison q

   a- Montrer que q est solution de l'equation $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0$

   b- En déduire les valeurs possibles de q

On prend par la suite $u_0=0$ et $u_1=-1$. On pose

$$v_n=u_{n+1}-u_n \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

2. Calculer v_0 et v_1 puis montrer que (v_n) est geometrique
3. a- Calculer en fonction de $n\geq 1$ la somme $S_n=\sum_{k=0}^{k=n-1} v_k$

   b- alculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$
4. Calculer u_n en fonction de n

Exercice :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $f_n(x)=x^3+n^2x-1$ avec $x\geq 0$

1. Montrer que la fonction f_n admet une fonction reciproque

   f_n^{-1} definie sur un intervalle J a determiner

   b- Determiner la monotonie de f_n^{-1} sur un l'intervalle J
2. Montrer que l'equation $f_n(x)=0$ admet une solution unique

   c_n appartenant a $[0,1]$
3. a- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*.$ $f_{n+1}(x)>f_n(x)$

   b- En déduire en posant $x=c_n$ que $f_{n+1}(c_n)>0$
4. En constatant que , $f_{n+1}(c_{n+1})=0$ montrer que la suite (u_n)

   est strictement décroissante et qu'elle est convergente
5. a- Montrer que $0<u_n<\frac{1}{n^2}$

   b- En deduire les limites $\lim u_n$ et $\lim nu_n$